Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Sascha Böhme, Lars Noschinski

Sommersemester 2011
Übungsblatt 9
11. Juli 2011

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 18. Juli 2011 **vor der Vorlesung** *in die THEO-Briefkästen*

Hinweis: *Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zum Übungsablauf und zu den Aufgabentypen auf der THEO-Website (`http://theo.in.tum.de/`).*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Ackermann-Funktion.

1. Zeigen Sie, dass $f(m, n) := \mathit{twopow}(a(m, n))$ nicht primitiv rekursiv ist, wobei $\mathit{twopow}(x) = 2^x$ gelten soll.
2. Zeigen Sie, dass $g(m, n) := \mathit{max}(10 \dot{-} a(m, n), 4)$ primitiv rekursiv ist. Geben Sie dazu eine Definition für g an und begründen Sie.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit der folgenden Mengen und wenden Sie zum Beweis Techniken der Reduzierbarkeit eines Problems A auf ein Problem B an.

1. $H_{\Sigma^*} = \{w \mid M_w \text{ hält für alle Eingaben}\}$
2. $C = \{w \mid M_w \text{ berechnet die Funktion } g \text{ mit } g(n) = 0 \text{ für alle n}\}$
3. Sei h eine totale, berechenbare Funktion. Dann ist $A = \{w \mid M_w \text{ berechnet } h\}$ unentscheidbar.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei L eine unendliche Sprache über einem endlichen Alphabet Σ, die von einer Turingmaschine M entsprechend der Länge der Wörter aufgezählt wird (zuerst alle Wörter kleinerer Länge).
Zeigen Sie, dass L entscheidbar ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Ist es entscheidbar, ob bei der Ausführung

(i) eines `LOOP`-Programms P (ii) eines `WHILE`-Programms P

auf Eingabe 0 jeder Variable mehr als 1000 Mal ein Wert zugewiesen wurde? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Quiz 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.
2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.
3. Für jede unentscheidbare Sprache A gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.
4. Aus „A entscheidbar“ und „$A \cap B$ entscheidbar“ folgt „B entscheidbar“.

Tutoraufgabe 1

1. Falls A auf B mit Funktion f reduzierbar ist, dann gilt $f^{-1}(B) = A$, aber nicht notwendigerweise $f(A) = B$. Beweis!
2. Falls A reduzierbar auf B und B semi-entscheidbar ist, dann ist auch A semi-entscheidbar. Beweis!
3. Sei $B \subseteq \Sigma^*$ mit $B \neq \Sigma^*$ und $B \neq \emptyset$ entscheidbar.
   Zeigen Sie: B ist reduzierbar auf $\Sigma^* \setminus B$.

Tutoraufgabe 2

1. Seien L_1 und L_2 rekursiv aufzählbare Mengen. Sind die folgenden Mengen L_a und L_b rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

   (i) $L_a = L_1 \cup L_2$ (i) $L_b = \{x \mid x \in L_1 \Leftrightarrow x \in L_2\}$
2. Sei $L_n \subseteq A$ für alle $n \in N$ rekursiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass dann auch

   $$L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

   rekursiv aufzählbar ist.
3. Sei $R \subseteq M \times M$ eine rekursiv aufzählbare Relation über einer Grundmenge M.

   Zeigen Sie, dass die transitive Hülle R^+ von R rekursiv aufzählbar ist.