Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Sascha Böhme, Lars Noschinski

Sommersemester 2011
Übungsblatt 8
11. Juli 2011

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 11. Juli 2011 **vor der Vorlesung** *in die THEO-Briefkästen*

Hinweis: *Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zum Übungsablauf und zu den Aufgabentypen auf der THEO-Website (`http://theo.in.tum.de/`).*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Ist $M = (Q, \Sigma, \Gamma \cup \{\Box\}, \delta, q_0, \Box, F)$ eine deterministische Turingmaschine, die L akzeptiert, so gibt es auch eine Turingmaschine M' mit Bandalphabet $\Gamma' = \{0, 1, \Box\}$, die L akzeptiert.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie: Eine Turingmaschine, die ihren Lese-/Schreibkopf nur nach rechts bewegt, akzeptiert eine reguläre Sprache.
Hinweis: Überführen Sie die Turingmaschine zunächst in eine Form, so dass sie die Eingabe vollständig liest und darüberhinaus nicht auf das Band zugreift. Beachten sie auch nichtterminierende Läufe der Turingmaschine.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass folgende Funktionen primitiv-rekursiv sind:

   (a) $\mathit{iszero}\,(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

   (b) $\mathit{eq}\,(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

   Sie dürfen bei den Definitionen der Funktionen nur auf die in Definition 4.30 genannten Funktionen sowie die Addition $x + y$ und $\mathit{pred}\,(x)$ und alle auf diesem Übungsblatt als PR bewiesenen Funktionen zurückgreifen. Außerdem dürfen Sie das erweiterte Schema der primitiven Rekursion verwenden.

2. Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die Division natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv ist. Sie dürfen dazu das erweiterte Schema der primitiven Rekursion und die erweiterte Komposition verwenden sowie alle Funktionen (insbesondere arithmetische), die in der Vorlesung sowie auf diesem Übungsblatt als PR gezeigt wurden. Wenn Sie weitere Funktionen verwenden, dann müssen Sie für sie zunächst zeigen, dass sie PR sind.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten zwei sich gegenseitig aufrufende, rekursive Funktionen. Diese seien wie folgt definiert

$$f(0) = s_0 \qquad f(m+1) = s \qquad g(0) = t_0 \qquad g(m+1) = t$$

wobei

- s_0 und t_0 aus primitiv-rekursiven Funktionen und
- s und t aus primitiv-rekursiven Funktionen sowie $f(m)$ und $g(m)$

zusammengesetzt sind. Zeigen Sie, dass f und g primitiv rekursiv sind. Sie dürfen dazu die erweiterte PR-Syntax und die Funktionen c, p_1 und p_2 aus der Vorlesung verwenden. *Hinweis:* Konstruieren Sie eine Funktion h, die $f(n) = p_1(h(n))$ und $g(n) = p_2(h(n))$ erfüllt.

Quiz 1

Ist die folgende Funktion primitiv-rekursiv?

$$f\,(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{falls } n > 100 \\ f\,(f\,(n+11)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Tutoraufgabe 1

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind.

1. $\mathit{twopow}\,(n) = 2^n$
2. $\mathit{tower}\,(n) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$ (d.h. $2^{(2^{(2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}})})}$, Turm der Höhe n)
3. $\mathit{ifthen}\,(n, a, b)$ mit

$$\mathit{ifthen}\,(n, a, b) = \begin{cases} a & n \neq 0 \\ b & n = 0 \end{cases}$$

Sie dürfen dabei das erweiterte Schema der primitiven Rekursion sowie alle bisher definierten Funktionen (insbesondere numerische Konstanten sowie die Funktionen $\mathit{add}\,(x, y)$ und $\mathit{mult}\,(x, y)$) verwenden.

Tutoraufgabe 2

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diejenige Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ durch die Rekursion

$$f(n+1) = f(n) \cdot f(n-1)$$

mit den Startwerten $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist, indem Sie ein `LOOP`-Programm angeben.
2. Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass f primitiv-rekursiv ist.

Tutoraufgabe 3

Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $U_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$U_f(n) = \begin{cases} \min \{m \in \mathbb{N} \mid f(m) = n+1\} & \text{falls ein solches } m \text{ existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Wenn f total und μ-rekursiv ist, dann ist auch U_f μ-rekursiv.