Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Sascha Böhme, Lars Noschinski

Sommersemester 2011
Übungsblatt 11
25. Juli 2011

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 1. August 2011 **bis 11:00 Uhr (vormittags)** *in die THEO-Briefkästen*

Hinweis: *Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zum Übungsablauf und zu den Aufgabentypen auf der THEO-Website (`http://theo.in.tum.de/`).*

Wenn die Zusatzaufgaben abgegeben und Punkte dadurch erworben werden, dann werden diese Punkte der zweiten Semesterhälfte gutgeschrieben. Die 40% Regelung bezieht sich dabei stets auf die normalen Hausaufgaben. Die Zusatzaufgaben können also dazu benutzt werden, fehlende Punkte auszugleichen.

Rückgabe der korrigierten Hausaufgaben: *Eingereichte Lösungen der Hausaufgaben können am Montag, dem 8. August 2011, in der Zeit von 10:00 bis 12:00 und am Dienstag, dem 9. August 2011, zwischen 14:00 und 16:00 jeweils im Raum MI 01.09.011 (Glaskasten) abgeholt werden.*

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)

Sei IF die Menge aller aussagenlogischen Formeln, die ausschließlich mit den Konstanten 0 und 1, logischen Variablen x_i mit $i \in \mathbb{N}$ und der Implikation $\rightarrow$ als Operationszeichen aufgebaut sind, wobei natürlich auch Klammern zugelassen sind. Beachten Sie, dass $x_i \rightarrow x_j$ die gleiche Wahrheitstafel wie $(\neg x_i) \vee x_j$ hat.

Wie betrachten das Problem $ISAT$:

Gegeben: $F \in IF$

Problem: Ist F erfüllbar, d.h., gibt es eine Belegung der Variablen mit Konstanten 0 oder 1, so dass F den Wert 1 annimmt?

Zeigen Sie: $ISAT$ ist NP-vollständig. Sie dürfen dazu benutzen, dass das SAT-Problem NP-vollständig ist.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie:

1. P ist abgeschlossen unter Komplement.
2. Das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener Graph ein Dreieck enthält, ist in P.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei A ein entscheidbares Problem und $B \in P$ ein nicht-triviales Problem (d.h. $B \neq \varnothing$ und $B \neq \Sigma^*$). Zeigen Sie: Aus $A \leq B$ können wir keine Aussage über die Komplexität von A treffen.
Hinweis: Betrachten Sie eine Reduktion auf die Menge $\{0, 1\}$.

Hausaufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $A, B \in \Sigma^*$ Sprachen in NP. Zeigen Sie, dass dann auch $A \cup B$, AB und A^* in NP liegen.
Hinweis: Überlegen Sie sich hierzu, wie geeignete Zertifikate aussehen.

Zusatzaufgabe 1 (4 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme für Paare von Turingmaschinen unentscheidbar sind:

1. *EQ*.

   Gegeben: Ein Paar von Turingmaschinen (M, N).

   Problem: Gilt $L(M) = L(N)$?

2. *ECUT*.

   Gegeben: Ein Paar von Turingmaschenen (M, N).

   Problem: Gilt $L(M) \cap L(N) = \varnothing$?

Zusatzaufgabe 2 (2 Zusatzpunkte)

Wir betrachten das Problem *PARTITION*:

Gegeben: Eine endliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$.

Problem: Gibt es ein $B \subseteq A$, so dass $\sum_{m \in B} m = \sum_{n \in A \setminus B} n$ gilt?

Zeigen Sie, dass *PARTITION* in NP liegt (in der Vorlesung wurde nur die NP-Härte bewiesen).

Zusatzaufgabe 3 (4 Zusatzpunkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:
Sei M ein polynomiell beschränkter Verifikator für das Problem A. Verwendet M nur Zertifikate, die logarithmisch in der Eingabelänge sind (das heißt, es gibt ein $x > 0$, so dass $|c| \leq x \cdot \log |w|$ gilt für alle $w\#c \in L(M)$), so ist A in P.

Quiz 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Seien A, B Sprachen mit $A \leq_p B$ und B NP-vollständig. Gilt dann A NP-vollständig?
2. Ist $time_M$ für jede deterministische Turingmaschine M berechenbar?
3. PSPACE ist die Klasse all jener Probleme, die eine DTM mit polynomiell viel Band lösen kann. Gilt $P \subseteq PSPACE$?

Tutoraufgabe 1

Eine Teilmenge $A \subseteq V$ von Knoten eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ nennt man Knotenüberdeckung von G, wenn alle Kanten von G einen Endpunkt in A haben. Wir definieren das Problem der KNOTENÜBERDECKUNG wie folgt:

Gegeben: Ein Graph G und eine Zahl k.

Problem: Gibt es eine Knotenüberdeckung von G mit höchstens k Knoten?

Zeigen Sie, dass das Problem der KNOTENÜBERDECKUNG NP-vollständig ist.

Tutoraufgabe 2

Das STUNDENPLAN-Problem, das in der Praxis allen bekannt ist, lässt sich vereinfacht wie folgt formal beschreiben:

Gegeben: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.

Problem: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$$

1. Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.
2. Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-hart ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben.
3. Geben Sie nun eine Reduktion von STUNDENPLAN auf SAT an, die es erlaubt, das Stundenplanproblem mit Hilfe eines SAT-Solvers zu lösen.