Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Sascha Böhme, Lars Noschinski

Sommersemester 2011
Übungsblatt 10
18. Juli 2011

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 25. Juli 2011 **vor der Vorlesung** *in die THEO-Briefkästen*

Hinweis: *Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zum Übungsablauf und zu den Aufgabentypen auf der THEO-Website (`http://theo.in.tum.de/`).*

Wenn die Zusatzaufgaben abgegeben und Punkte dadurch erworben werden, dann werden diese Punkte der zweiten Semesterhälfte gutgeschrieben. Die 40% Regelung bezieht sich dabei stets auf die normalen Hausaufgaben. Die Zusatzaufgaben können also dazu benutzt werden, fehlende Punkte auszugleichen.

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben sie für jede der folgenden Mengen an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(001) = 110\}$
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_{110}(001) = w\}$
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \varphi_w(xx) = \varphi_w(x)\,\varphi_w(x)\}$

Hausaufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Bestimmen Sie alle Lösungen des Postschen Korrespondenzproblems
$$P_1 = \{(a, aaa), (abaaa, ab), (ab, b)\}$$
2. Zeigen Sie, dass die folgende Instanz des Postschen Korrespondenzproblems keine Lösung hat:
$$P_2 = \{(ab, aba), (baa, aa), (aba, baa)\}$$
3. Besitzt die folgende Instanz des Postschen Korrespondenzproblems eine Lösung oder nicht? Geben Sie dazu entweder alle Lösungen mit Begründung an oder zeigen Sie, dass es keine Lösung gibt.
$$P_3 = \{(bba, b), (ba, baa), (ab, aab), (aaa, a)\}$$

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ rekursiv aufzählbare Sprachen. Zeigen Sie:

1. $A := L_1 L_2$ ist rekursiv aufzählbar.
2. $B := L_1 \cap L_2$ ist rekursiv aufzählbar.

Hinweis: Die Cantorsche Paarfunktion bzw. die dazugehörigen Projektionen p_1 und p_2 könnten hilfreich sein.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Sie dürfen das erweiterte Schema der Rekursion sowie die bereits definierten Funktionen, insbesondere auch den beschränkten Maximumsoperator, verwenden.

1. $f(n) = \begin{cases} \sqrt[3]{n} & \text{falls } \sqrt[3]{n} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\mathrm{even}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade, d.h. } 2|n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Zusatzaufgabe 1 (3 Zusatzpunkte)

Sei nun $v \in \Sigma^*$ ein beliebiges, aber fest gewähltes Wort. Überlegen und begründen Sie, was man zur Entscheidbarkeit der folgenden Menge aussagen kann:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_v(w) = 110\}$$

Zusatzaufgabe 2 (3 Zusatzpunkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. Wir betrachten eine Variante des PCP namens $\mathrm{PCP}_\$$, bei der die Wörter auf den Karten immer mit \$ beginnen:

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ mit $x_i, y_i \in L(\$(0|1)^+)$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$ mit $n > 0$, so dass $x_{i_1} \cdots x_{i_k} = y_{i_1} \cdots y_{i_k}$?

Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathrm{PCP}_\$$ ist entscheidbar.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten wieder die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über $\Sigma^* = \{0,1\}^*$. Für ein $w \in \Sigma^*$ beschreibt $\varphi_w : \Sigma^* \to \Sigma^*$ dann die Funktion, die durch die Turingmaschine M_w berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1. $A = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w = \Omega\}$
2. $B = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(101) \neq \perp\}$
3. $C = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(\epsilon) = w\}$
4. $D = \{(u,v,w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \varphi_u(w) = \varphi_v(w)\}$

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice:

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid L(M_w)$ ist kontextfrei$\}$ ist unentscheidbar.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}.\, \varphi_w(n) = 3n+5\}$ ist unentscheidbar.

Warum kann man den Satz von Rice auf folgende Menge nicht anwenden?

3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}.\, \varphi_w(n) = \perp$ und w ist ein Palindrom$\}$

Tutoraufgabe 3

1. Wir betrachten das Postsche Korrespondenzproblem $P = (\,(1, c1), (abc, ab)\,)$.

   Bestimmen Sie *alle* Lösungen von P!

2. Sei $P = (p_1, p_2)$ ein Postsches Korrespondenzproblem über einem beliebigem Alphabet Σ mit $p_i = (x_i, y_i)$ und $|\,|x_i| - |y_i|\,| = 1$ für $i = 1, 2$.

   Zeigen Sie, dass P entscheidbar ist!