Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Sascha Böhme, Lars Noschinski

Sommersemester 2011
Lösungsblatt 1
23. Mai 2011

Einführung in die Theoretische Informatik

Hinweis: *Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zum Übungsablauf und zu den Aufgabentypen auf der THEO-Website (`http://theo.in.tum.de/`).*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{aa, aaa, b\}$. Geben Sie, wenn möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

1. $L_1 = \{w \mid w \in A^2 \wedge w \in A^3\}$
2. $L_2 = \{w \in A^* \mid |w| = 3\}$
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in A. w = uv\}$
4. $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u. uw = w^2 u\}$
5. $L_5 = \{(ba^n b)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Lösungsvorschlag

1. $L_1 = \{a^6\},\ a, b, aaa \in \Sigma^* \setminus L_1$
2. $aaa, aab, bbb \in L_2,\ a, bb, aaab \in \Sigma^* \setminus L_2$
3. $aa, bbaa, bab \in L_3,\ ba, aba, bba \in \Sigma^* \setminus L_3$
4. $L_4 = \{\epsilon\},\ a, b, aa \in \Sigma^* \setminus L_4$
5. $\epsilon, bab, baabbaab \in L_5,\ bb, baab, abba \in \Sigma^* \setminus L_5$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und A eine Sprache über Σ.

1. Zeigen Sie: $A^* = A^+ \Leftrightarrow \epsilon \in A$.
2. Zeigen Sie: Ist $A \neq \varnothing$, so gilt $A = AA \Leftrightarrow A = A^*$.
3. Geben Sie ein Beispiel für Sprachen A, B, C, so dass $A(B \cap C) = AB \cap AC$ nicht gilt.

Lösungsvorschlag

1. Beweis in zwei Teilschritten:

   (a) Nehmen wir an, dass $A^* = A^+$ gilt. Da $\epsilon \in A^*$ gilt, ist auch $\epsilon \in A^+$. Mit $A^+ = AA^*$ folgt, dass es Wörter $u \in A$ und $v \in A^*$ geben muss, so dass $\epsilon = uv$. Dies gilt allerdings nur für $u = \epsilon$ (und $v = \epsilon$), weshalb $\epsilon \in A$ folgt.

   (b) Gelte $\epsilon \in A$. Dann gilt auch $\epsilon \in A^+$, denn $A^+ = AA^*$ und $\epsilon \in A^*$. Somit folgt:

   $$A^* = \bigcup_{n\geq 0} A^n = A^0 \cup \bigcup_{n\geq 1} A^n = \{\epsilon\} \cup A^+ = A^+$$

2. Beweis in zwei Teilschritten:

   (a) Nehmen wir an, dass $A = AA$ gilt. Da wir $A \neq \varnothing$ voraussetzen, folgt $\epsilon \in A$. Andernfalls sind alle Wörter in AA länger als das kürzeste Wort in A, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Aus $\epsilon \in A$ folgt $A^0 \subseteq A$. Außerdem folgt per Induktion, dass $A = A^n$ für ein beliebiges $n \geq 2$ gilt, denn:

   - Induktionsanfang: $A = A^2$ aufgrund der Annahme
   - Induktionsschritt: Gelte $A = A^n$. Dann gilt auch:

   $$A = A^n = AA^{n-1} = AAA^{n-1} = A^{n+1}$$

   Damit haben wir:

   $$\begin{aligned} A &= A^0 \cup A^1 \cup \bigcup_{n\geq 2} A && (A^0 \subseteq A, A^1 = A) \\ &= A^0 \cup A^1 \cup \bigcup_{n\geq 2} A^n && (A = A^n \text{ für } n \geq 2) \\ &= \bigcup_{n\geq 0} A^n \\ &= A^* \end{aligned}$$

   (b) Nehmen wir an, dass $A = A^*$ gilt. Dann folgt:

   $$\begin{aligned} A &= A^* && (\text{Annahme } A = A^*) \\ &= A^*A^* && (\text{siehe Tutoraufgabe 1}) \\ &= AA && (\text{Annahme } A = A^*) \end{aligned}$$

3. $A = \{a, aa\}, B = \{a\}, C = \{aa\}$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet, A eine Sprache und $w \in \Sigma^*$.

1. Zeigen Sie nach der rekursiven Definition von w^n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $ww^n = w^n w$.

2. In der Vorlesung haben wir $A^0 = \{\epsilon\}$ definiert. Warum haben wir nicht $A^0 = \varnothing$ gesetzt? Beweisen Sie dazu eine naheliegende Rechenregel für $A^n A^m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, die aber mit $A^0 = \varnothing$ nicht gelten würde.

Lösungsvorschlag

1. Zeige $ww^n = w^n w$ per Induktion über n.

   - $n = 0$: Nach Definition ist $w^0 = \epsilon$ und damit $ww^0 = w\epsilon = w = \epsilon w = w^0 w$.
   - $n \to n+1$: Mit der Induktionshypothese gilt $ww^n = w^n w$ und damit haben wir $ww^{n+1} = w(ww^n) = w(w^n w) = (ww^n)w = w^{n+1}w$.

2. Eine solche Rechenregel ist $A^m A^n = A^{m+n}$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$, bekannt z.B. aus der Arithmetik. Mit $A^0 = \varnothing$ gilt sie nicht: Sei A eine nicht-leere Sprache, dann ist

   $$A^0 A^1 = \varnothing A = \varnothing = \varnothing \neq A = A^{0+1}.$$

   Für $A^0 = \{\epsilon\}$ gilt die Gleichung jedoch. Wir zeigen dies per Induktion über m mit der Induktionshypothese (IH) "Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^m A^n = A^{m+n}$".

   - $m = 0$: Es gilt $A^0 A^n = \{uv \mid u \in A^0 \wedge v \in A^n\} = \{\epsilon v \mid v \in A^n\} = A^n = A^{n+0}$.
   - $m \to m+1$ mit $m > 1$: Es gilt

   $$A^{m+1}A^n \overset{\text{(Def)}}{=} AA^m A^n \overset{\text{(IH)}}{=} AA^{m+n} \overset{\text{(Def)}}{=} A^{1+m+n} = A^{(m+1)+n}$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie: Seien $u, v \in \Sigma^*$ Wörter mit $u \neq \epsilon$, $v \neq \epsilon$ und $uv = vu$. Dann existiert ein $z \in \Sigma^*$ mit $u = z^m$ und $v = z^n$ für gewisse $m, n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Notation w_i um den i-ten Buchstaben eines Wortes w zu bezeichnen. Dabei bezeichnet w_1 den ersten Buchstaben.

Lösungsvorschlag

Wir zeigen die Aussage per Induktion über $|uv|$ und nehmen dazu an, dass die Aussage bereits für alle Wörter $u', v' \in \Sigma^*$ mit $|u'v'| < |uv|$ gilt.
Für den Induktionsschritt können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $|u| \leq |v|$ gilt (ansonsten vertauschen wir u und v).
Zunächst einmal gilt: $u_i = (uv)_i = (vu)_i = v_i$ für alle $1 \leq i \leq |u|$. Haben wir $|u| = |v|$, so folgt damit $u = v$, und die Aussage gilt mit $z = u = v$ und $m = n = 1$.
Andernfalls gibt es ein $w \neq \epsilon$ mit $v = uw$ und es gilt: $uuw = uv = vu = uwu$ und damit $uw = wu$. Nach Induktionshypothese existieren also $m, k \in \mathbb{N}$ und ein Wort $z \in \Sigma^*$, so dass $z^m = u$ und $z^k = w$. Dann ist aber $v = uw = z^m z^k = z^{m+k}$, und die Aussage gilt mit $n = m + k$.

Quiz 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Gibt es Sprachen A, B, so dass $|AB| < |A|$?
2. Wie viele Zustände muss ein Automat mindestens haben, wenn er nur Wörter der Länge 3 erkennt?
3. Geben Sie alle Sprachen A an, für die A^* endlich ist.

Lösungsvorschlag

1. Ja, alle Sprachen mit $A \neq \varnothing$ und $B = \varnothing$.
2. Ein nichtdeterministischer Automat braucht mindestens vier Zustände. Da die Übergangsfunktion total sein muß, braucht ein deterministischer Automat braucht mindestens fünf Zustände: Nämlich einen "Fangzustand", um alle Wörter der Länge 4 oder größer aufzufangen.
3. Die einzigen solchen Sprachen sind $\varnothing$ und $\{\epsilon\}$.

Tutoraufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet und $A,\ B \subset \Sigma^*$ formale Sprachen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $A \subseteq B \Longrightarrow A^n \subseteq B^n$
2. $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \subseteq B^*$
3. $|A \times A| = |AA|$
4. $A^*A^* = A^*$
5. $(B \setminus A)^* \cup A^* = B^*$

Lösungsvorschlag

1. Wir nehmen die Prämisse $A \subseteq B$ an und beweisen die Aussage $A^n \subseteq B^n$ durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

   $\underline{n = 0}$: Es gilt $A^0 = \{\epsilon\} \subseteq \{\epsilon\} = B^0$.

   $\underline{n \to n+1}$: Wir nehmen $A^n \subseteq B^n$ an. Dann gilt $A^{n+1} = \underbrace{AA^n \subseteq BB^n}_{\text{da } A \subseteq B \text{ und } A^n \subseteq B^n} = B^{n+1}$.

   Hier haben wir die Monotoniebeziehung aus der Vorbereitungsaufgabe verwendet.

2. Sei $A \subseteq B$. Wir zeigen $x \in A^* \Longrightarrow x \in B^*$.

   Für ein $x \in A^*$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in A^n$. Mit Teilaufgabe 1 folgt $x \in B^n \subseteq B^*$.

3. Die Gleichung gilt nicht für alle A. Sei z.B. $\Sigma = \{a\}$ und $A = \{\varepsilon, a\} \subseteq \Sigma^*$.

   Dann gilt $|A \times A| = |\{(\varepsilon,\varepsilon), (\varepsilon,a), (a,\varepsilon), (a,a)\}| = 4$.
   Andererseits gilt $|AA| = |\{\varepsilon\varepsilon, \varepsilon a, a\varepsilon, aa\}| = |\{\varepsilon, a, aa\}| = 3$.

   Hier ist der bedeutende Unterschied, dass die Sprachen-Konkatenation assoziativ ist, das kartesische Produkt $\times$ jedoch nicht.

   Falls A nicht leer ist, gilt sogar $A \times (A \times A) \neq (A \times A) \times A$.

4. Da stets $\epsilon \in A^*$, folgt offenbar $A^* \subseteq A^*A^*$. Für die Gegenrichtung $A^*A^* \subseteq A^*$, sei $w \in A^*A^*$ Dann gibt es $u, v \in \Sigma^*$ und $m, n \in \mathbb{N}$ so dass $w = uv$ und $u \in A^m$ und $v \in A^n$. Dann ist $w \in A^{n+m}$ und somit $w \in A^*$.

5. Sei $B = \{a, b\}$ und $A = \{a\}$.
   Dann gilt $B \setminus A = \{b\}$ und es folgt

   $$(B \setminus A)^* \cup A^* = \{b\}^* \cup \{a\}^* \neq B^*$$

   Die obige Ungleichung gilt, da z.B. $ab \in B^*$, aber $ab \notin \{b\}^* \cup \{a\}^*$.

   Es gibt auch andere einfache Gegenbeispiele, z.B. $A = \{a\}$, $B = \emptyset$.

Tutoraufgabe 2

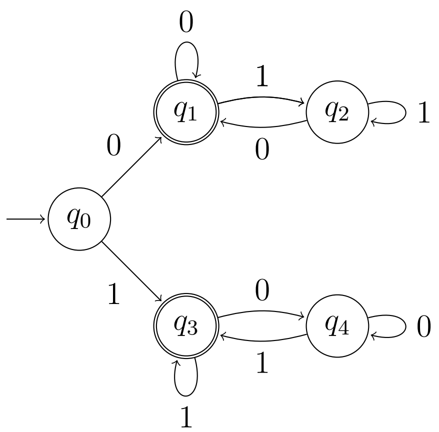
Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die entweder mit 1 beginnen und mit 1 enden oder mit 0 beginnen und mit 0 enden.

1. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an, der L akzeptiert.

2. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) mit höchstens 4 Zuständen an, der L akzeptiert.

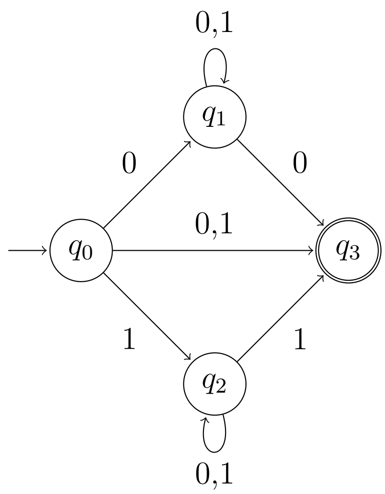
Lösungsvorschlag

1. Entsprechender (minimaler) deterministischer Automat:



q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
q_0	q_1	q_3
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2
q_3	q_4	q_3
q_4	q_4	q_3

2. Nichtdeterministischer Automat, der L akzeptiert:



q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
q_0	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$