Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. M. Broy

WS 2001
Übungsblatt 11
10. Januar 2002

Übungen zu Einführung in die Informatik I

Aufgabe 44 Semantik rekursiver Funktionsdeklarationen

Gegeben ist folgende rekursive Funktionsdeklaration:

fct f = (**nat** x, **nat** y) **nat** :
  if y $\stackrel{?}{=}$ 0 **then** 1
    else x*f(x,y-1) **fi**

a) Geben Sie das zu f gehörende Funktional τ an.

b) Berechnen Sie die Approximationsfunktionen f_0, f_1, f_2, f_3.

c) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine geschlossene Form der Funktion f_n an und beweisen Sie deren Richtigkeit.

d) Wie lautet f^∞?

e) Was ist der kleinste Fixpunkt von τ und wieviele Fixpunkte besitzt τ?

Aufgabe 45 Spezifikation und partielle Korrektheit

Die Funktion istPraefix mit der Funktionalität **fct** istPraefix = (**seq m** x, **seq m** y) **bool** berechnet, ob x ein Präfix von y ist (vgl. Übungsblatt 3, Aufgabe 10).

a) Geben Sie die Spezifikation der Funktion istPraefix in der Spezifikationssprache der Vorlesung an.

b) Schreiben Sie eine rekursive Funktion, welche die Funktion istPraefix berrechnet!

c) Geben Sie das zur rekursiven Funktionsdefinition gehörende Funktional τ an!

d) Zeigen Sie die partielle Korrektheit der rekursiven Funktionsdefinition aus b) gegenüber der Spezifikation aus a).

Aufgabe 46 Effizienz rekursiver Algorithmen

Für die Rechenvorschrift *perm* der Aufgabe 42, Übungsblatt 10, soll der Rechenaufwand abgeschätzt werden. Ein Maß dafür ist die Zahl der bei einer Berechnung auszuwertenden Grundoperationen oder auch die Anzahl der entstehenden rekursiven Aufrufe.

a) Schreiben Sie Rechenvorschriften $perm_a$ und $perm1_a$ mit Funktionalität

fct perm$_a$ = (**seq m** s) **nat**,
fct perm1$_a$ = (**seq m** t, **seq m** l, **seq m** r) **nat**

so daß $perm_a(s)$ und $perm1_a(t,l,r)$ jeweils die Anzahl der Knoten im Aufrufbaum zu $perm(s)$ bzw. $perm1(t,l,r)$ liefern.

b) $|s|$ bezeichne die Länge einer Sequenz s. Durch Induktion läßt sich für $perm1_a$ die folgende Abschätzung zeigen:

$$|r| * (|l \circ r| - 1)! \leq perm1_a(t,l,r) \leq 1 + |r| * |l \circ r|!$$

Leiten Sie mit deren Hilfe eine Abschätzung für $perm_a(s)$ ab. Läßt sich der Rechenaufwand von $perm$ wesentlich verringern?

Aufgabe 47 (H) Semantik rekursiver Funktionen

Ziel dieser Aufgabe ist es die Funktion **rev**, die eine gegebene Textsequenz revertiert, zu analysieren.

a) Die Funktion **rev** sei in Pseudocode folgendermaßen gegeben:

fct rev = (**string** xs) **string**:
    if (xs $\stackrel{?}{=}$empty) **then** xs
        else rev (rest (xs)) ∘ <first (xs)>
    fi

Bestimmen Sie das zu **rev** gehörende Funktional:

$$\tau : (\text{String}^{\perp} \to \text{String}^{\perp}) \to (\text{String}^{\perp} \to \text{String}^{\perp})$$

b) Die Funktionenfolge f_i sei durch

$$\begin{array}{lcll} f_0 & = & \perp & \forall xs \in \text{String}^{\perp} \\ f_{i+1}(xs) & = & \tau[f_i](xs) & \forall xs \in \text{String}^{\perp} \end{array}$$

gegeben. Bestimmen Sie nach dieser Definition die Funktionen f_0, f_1, f_2 und f_3. Geben Sie (ohne Beweis) f_{i+1} an!

c) Geben Sie eine Lösung der Fixpunktgleichung

$$\tau[F](xs) = F(xs)$$

an und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung durch Einsetzen in die Fixpunktgleichung!

d) Übersetzen Sie das Funktional τ sowie die Funktionen f_0, f_1, f_2 und f_3 in Gofer-Notation! Implementieren Sie eine Funktion, die unter Verwendung von τ einen String beliebiger Länge revertiert.