

Übungen zu Einführung in die Informatik I

Aufgabe 44 Semantik rekursiver Funktionsdeklarationen

Gegeben ist folgende rekursive Funktionsdeklaration:

```
fct f = (nat x, nat y) nat :  
  if y  $\neq$  0 then 1  
    else x*f(x,y-1) fi
```

- a) Geben Sie das zu f gehörende Funktional τ an.
- b) Berechnen Sie die Approximationsfunktionen f_0, f_1, f_2, f_3 .
- c) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine geschlossene Form der Funktion f_n an und beweisen Sie deren Richtigkeit.
- d) Wie lautet f^∞ ?
- e) Was ist der kleinste Fixpunkt von τ und wieviele Fixpunkte besitzt τ ?

Aufgabe 45 Spezifikation und partielle Korrektheit

Die Funktion istPrefix mit der Funktionalität **fct** istPrefix = (seq m x, seq m y) bool berechnet, ob x ein Präfix von y ist (vgl. Übungsblatt 3, Aufgabe 10).

- a) Geben Sie die Spezifikation der Funktion istPrefix in der Spezifikationssprache der Vorlesung an.
- b) Schreiben Sie eine rekursive Funktion, welche die Funktion istPrefix berechnet!
- c) Geben Sie das zur rekursiven Funktionsdefinition gehörende Funktional τ an!
- d) Zeigen Sie die partielle Korrektheit der rekursiven Funktionsdefinition aus b) gegenüber der Spezifikation aus a).

Aufgabe 46 Effizienz rekursiver Algorithmen

Für die Rechenvorschrift *perm* der Aufgabe 42, Übungsblatt 10, soll der Rechenaufwand abgeschätzt werden. Ein Maß dafür ist die Zahl der bei einer Berechnung auszuwertenden Grundoperationen oder auch die Anzahl der entstehenden rekursiven Aufrufe.

- a) Schreiben Sie Rechenvorschriften $perm_a$ und $perm1_a$ mit Funktionalität

fct $\text{perm}_a = (\text{seq } m \ s) \ \text{nat},$
fct $\text{perm1}_a = (\text{seq } m \ t, \text{seq } m \ l, \text{seq } m \ r) \ \text{nat}$

so daß $\text{perm}_a(s)$ und $\text{perm1}_a(t, l, r)$ jeweils die Anzahl der Knoten im Aufrufbaum zu $\text{perm}(s)$ bzw. $\text{perm1}(t, l, r)$ liefern.

- b) $|s|$ bezeichne die Länge einer Sequenz s . Durch Induktion läßt sich für perm1_a die folgende Abschätzung zeigen:

$$|r| * (|l \circ r| - 1)! \leq \text{perm1}_a(t, l, r) \leq 1 + |r| * |l \circ r|!$$

Leiten Sie mit deren Hilfe eine Abschätzung für $\text{perm}_a(s)$ ab. Läßt sich der Rechenaufwand von perm wesentlich verringern?

Aufgabe 47 (H) Semantik rekursiver Funktionen

Ziel dieser Aufgabe ist es die Funktion **rev**, die eine gegebene Textsequenz revertiert, zu analysieren.

- a) Die Funktion **rev** sei in Pseudocode folgendermaßen gegeben:

```
fct rev = (string xs) string:  
    if (xs  $\stackrel{?}{=}$  empty) then xs  
        else rev (rest (xs))  $\circ$  <first (xs)>  
    fi
```

Bestimmen Sie das zu **rev** gehörende Funktional:

$$\tau : (\text{String}^\perp \rightarrow \text{String}^\perp) \rightarrow (\text{String}^\perp \rightarrow \text{String}^\perp)$$

- b) Die Funktionenfolge f_i sei durch

$$\begin{aligned} f_0 &= \perp & \forall xs \in \text{String}^\perp \\ f_{i+1}(xs) &= \tau[f_i](xs) & \forall xs \in \text{String}^\perp \end{aligned}$$

gegeben. Bestimmen Sie nach dieser Definition die Funktionen f_0 , f_1 , f_2 und f_3 . Geben Sie (ohne Beweis) f_{i+1} an!

- c) Geben Sie eine Lösung der Fixpunktgleichung

$$\tau[F](xs) = F(xs)$$

an und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung durch Einsetzen in die Fixpunktgleichung!

- d) Übersetzen Sie das Funktional τ sowie die Funktionen f_0 , f_1 , f_2 und f_3 in Gofer-Notation! Implementieren Sie eine Funktion, die unter Verwendung von τ einen String beliebiger Länge revertiert.