

Übungen zu Einführung in die Informatik I

Aufgabe 31 Das Prinzip der Induktion (Lösungsvorschlag)

Zur vollständigen Induktion gibt es mehrere Varianten. In dieser Aufgabe werden Sie eine erste Form der Induktion kennenlernen:

Das Prinzip: Es sei $A(n)$ eine Aussage über einer natürlichen Zahl n , dann bedeutet das Prinzip der vollständigen Induktion folgendes:

- Gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ (**Induktionsanfang**)
- und folgt aus der Gültigkeit der Aussage $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n+1)$ (**Induktionsschritt**)
- dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Wir beweisen nun die Aussage $A(x) = (\text{gerade}(x) \stackrel{?}{=} \text{gerade}'(x))$

(i) **Induktionsanfang:** Es sei $x_0 = 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\text{gerade}(x_0) &= (\text{mod}(0, 2) \stackrel{?}{=} 0) \\ &= (0 \stackrel{?}{=} 0) \\ &= \text{True}.\end{aligned}$$

Andererseits ist $\text{gerade}'(x_0) = \text{True}$ gemäß Definition und somit gilt $A(x_0)$.

(ii) **Induktionsschritt:** Nun ist zu zeigen, dass aus der Gültigkeit von $A(x)$, die Gültigkeit von $A(x+1)$ folgt. Gelte nun also $A(x)$ für ein $x \geq x_0$ (**Induktionsannahme**); dann ist zu zeigen, dass daraus $(\text{gerade}(x+1) \stackrel{?}{=} \text{gerade}'(x+1))$ folgt.

Wir betrachten $\text{gerade}'(x+1)$:

$$\begin{aligned}\text{gerade}'(x+1) &= \neg(\text{gerade}'(x)) && \text{Definition von } \text{gerade}'(x) \\ &= \neg(\text{gerade}(x)) && \text{Induktionsannahme} \\ &= \neg(\text{mod}(x, 2) \stackrel{?}{=} 0) && \text{Definition von } \text{gerade}(x) \\ &= (\text{mod}(x, 2) \stackrel{?}{=} 1) && \text{Rest bei Division durch 2 ist} \\ &&& \text{entweder 0 oder 1} \\ &= (\text{mod}(x+1, 2) \stackrel{?}{=} 0) \\ &= \text{gerade}(x+1)\end{aligned}$$

Somit folgt aus $A(x)$ die Gültigkeit von $A(x+1)$ und die Äquivalenz von $\text{gerade}(x)$ und $\text{gerade}'(x)$ ist gezeigt.

Aufgabe 32 Induktion über den Termaufbau: Negationsnormalform (Lösungsvorschlag)**Vorbemerkung:**

Aufgrund der Gesetze

$$\begin{aligned}(t_1 \Rightarrow t_2) &= (\neg t_1 \vee t_2) \\ (t_1 \Leftrightarrow t_2) &= (t_1 \wedge t_2) \vee (\neg t_1 \wedge \neg t_2) \\ \text{true} &= (x \vee \neg x) \\ \text{false} &= \neg \text{true}\end{aligned}$$

für beliebige Boolesche Terme (BT) t_1, t_2 und Identifikator x , können wir $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \text{true}, \text{false}$ auf $\vee, \wedge, \neg$ zurückführen. Wir betrachten daher nur BT gebildet mit den Operatoren $\vee, \wedge$ und $\neg$ über Identifikatoren aus ID und elementaren Aussagen in E .

Induktion über den Termaufbau:

Aufgrund der induktiven Definition von BT gilt folgendes Induktionsprinzip für BT:

Sei $P(t)$ ein Prädikat über BT t . Wenn gilt

- a) $P(t)$ gilt für alle atomaren elementaren Aussagen in E und alle Identifikatoren in ID , d.h. für alle $t \in E \cup ID$.
- b) Aus $P(t)$ folgt $P(\neg t)$ für alle BT t .
- c) Aus $P(t_1), P(t_2)$ folgen $P(t_1 \wedge t_2)$ und $P(t_1 \vee t_2)$ für alle BT t_1, t_2 .

so gilt $P(t)$ für alle BT t .

Induktionsbeweis für Existenz der Negationsnormalform (NNF):

Wir definieren als spezielles Prädikat

$$P(t) = \text{“Die BT } t \text{ und } \neg t \text{ lassen sich auf semantisch äquivalente BT in NNF reduzieren”}$$

Induktionsbeginn (IB):

Zu zeigen ist (a) für unser spezielles P . Sei $t \in E \cup ID$. t und $\neg t$ sind bereits in NNF und jeweils zu sich selbst semantisch äquivalent.

Induktionsschritt (IS):

Zu zeigen sind (b) und (c) für unser spezielles P .

zu (b): Als Induktionshypothese (IH) gelte $P(t)$, d.h. t und $\neg t$ lassen sich auf semantisch äquivalente BT in NNF reduzieren. Zu zeigen ist $P(\neg t)$, d.h. $\neg t$ und $\neg(\neg t)$ lassen sich auf semantisch äquivalente BT in NNF reduzieren. Wegen $\neg(\neg t) = t$ folgt dies aus der IH.

zu (c): Als IH gelte $P(t_1)$ und $P(t_2)$. Äquivalente BT in NNF für t_1, t_2 seien s_1, s_2 und für $\neg t_1, \neg t_2$ seien dies r_1, r_2 . Dann gilt

$$\begin{aligned}(t_1 \wedge t_2) &= (s_1 \wedge s_2) \text{ ist in NNF} \\ (t_1 \vee t_2) &= (s_1 \vee s_2) \text{ ist in NNF} \\ \neg(t_1 \wedge t_2) &= ((\neg t_1) \vee (\neg t_2)) = (r_1 \vee r_2) \text{ ist in NNF} \\ \neg(t_1 \vee t_2) &= ((\neg t_1) \wedge (\neg t_2)) = (r_1 \wedge r_2) \text{ ist in NNF}\end{aligned}$$

Somit gilt $P(t)$ für alle BT t nach dem obigen Induktionsprinzip.

Aufgabe 33 Funktionsabstraktion, call-by-value, call-by-name (Lösungsvorschlag)

call-by-value $((\text{nat } t, \text{nat } x, \text{nat } y, \text{nat } z) \text{ nat} : E)(1 * 1, 12 - 8 + 100, 12 - 8, 12 - 8 + 100)$

- Auswertungsregel: $((s_1 x_1, \dots, s_n x_n) s : E)(E_1, \dots, E_n) \rightarrow E[E_1/x_1, \dots, E_n/x_n]$, falls E_i terminal für $1 \leq i \leq n$
- Auswertung der aktuellen Parameterausdrücke (Argumente) liefert: 1, 104, 4, 104
- Anwendung der Auswertungsregel (Substitution der formalen Parameter im Rumpf durch die aktuellen Parameterwerte)

```

if 1  $\stackrel{?}{=}$  0 then 104*104*104
      else if 1  $\stackrel{?}{=}$  1 then 104*104*4
            else 104*4*104
      fi
fi

```

- Anwendung der bedingten Regel:
 $B \rightarrow B' \Rightarrow \text{if } B \text{ then } E \text{ else } E' \text{ fi} \rightarrow \text{if } B' \text{ then } E \text{ else } E' \text{ fi}$

```

if false then 104*104*104
      else if 1  $\stackrel{?}{=}$  1 then 104*104*4
            else 104*4*104
      fi
fi

```

- Anwendung der Regel: **if false then E else E' fi** $\rightarrow E'$

```

if 1  $\stackrel{?}{=}$  1 then 104*104*4
      else 104*4*104
fi

```

- Anwendung bed. Regel zzgl. Regel: **if true then E else E' fi** $\rightarrow E$
 $104*104*4$

- Auswertung liefert Ergebnis: 43264
- Anzahl der Auswertungen für t, x, y, z : jeweils genau ein mal

call-by-name $((\text{nat } t, \text{nat } x, \text{nat } y, \text{nat } z) \text{ nat} : E)(1 * 1, 12 - 8 + 100, 12 - 8, 12 - 8 + 100)$

- Auswertungsregel: $((s_1 x_1, \dots, s_n x_n) s : E)(E_1, \dots, E_n) \rightarrow E[E_1/x_1, \dots, E_n/x_n]$
- Anwendung der Auswertungsregel:

```

if (1*1)  $\stackrel{?}{=}$  0 then (12-8+100)*(12-8+100)*(12-8+100)
      else if (1*1)  $\stackrel{?}{=}$  1 then (12-8+100)*(12-8+100)*(12-8)
            else (12-8+100)*(12-8)*(12-8+100)
      fi
fi

```

- Auswertung von $1*1$ (d.h. t) in äusserem **if**
- Anwendung der bedingten Regel für **if**

```

if false then (12-8+100)*(12-8+100)*(12-8+100)
      else if (1*1)  $\stackrel{?}{=}$  1 then (12-8+100)*(12-8+100)*(12-8)
            else (12-8+100)*(12-8)*(12-8+100)
      fi
fi

```

- Anwendung der Regel: **if false then E else E' fi** $\rightarrow E'$

```

if (1*1)  $\stackrel{?}{=}$  1 then (12-8+100)*(12-8+100)*(12-8)
           else (12-8+100)*(12-8)*(12-8+100)
fi

```

- Auswertung von 1*1 (d.h. t) in **if**
- Anwendung der bedingten Regel für **if**

```

if true then (12-8+100)*(12-8+100)*(12-8)
           else (12-8+100)*(12-8)*(12-8+100)
fi

```

- Anwendung der Regel: **if true then E else E' fi** $\rightarrow$ E
(12-8+100)*(12-8+100)*(12-8)
- Auswertung von (12-8+100), (12-8+100), (12-8) und Multiplikation liefert: 43264
- Anzahl der Auswertungen: $t:2, x:2, y:1, z:0$

Aufgabe 34 Guarded Equations und bedingte Ausdrücke (Lösungsvorschlag)

```

a) ggT1 :: Int -> Int -> Int
   ggT1 a b | a==b = a
             | a>b  = ggT1 (a-b) b
             | otherwise = ggT1 a (b-a)

```

```

ggT2 :: Int -> Int -> Int
ggT2 a b = if a==b then a
           else if a>b then ggT2 (a-b) b
           else ggT2 a (b-a)

```

```

b) data Rat = Quot (Int, Int)

```

```

zaehler :: Rat -> Int
zaehler (Quot(a, b)) = a

```

```

nenner :: Rat -> Int
nenner (Quot (a, b)) = b

```

```

kuerze :: Rat -> Rat
kuerze (Quot (a, 0)) = undefined
kuerze (Quot (a, b)) = Quot ((a/gcd a b), (b/gcd a b))

```

```

isdef :: Rat -> Bool
isdef (Quot (a, b)) = b /= 0

```

```

isInteger :: Rat -> Bool
isInteger r = (nenner (kuerze r)) == 1

```

```

hauptnenner :: Rat -> Rat -> Int
hauptnenner r1 r2 = if (isdef r1 && isdef r2) then lcm (nenner (kuerze r1))
                    (nenner (kuerze r2))
                    else undefined

```

```

addiere :: Rat -> Rat -> Rat
addiere r1 r2 | (isdef r1 && isdef r2) = Quot ((z1 + z2), hn)
              | otherwise = undefined
              where { hn = hauptnenner r1 r2;
                      z1 = ((zaehler r1) * hn) / (nenner r1);
                      z2 = ((zaehler r2) * hn) / (nenner r2)
                    }

```

```
-- Tests
```

```
r = Quot(3,6)
```

```
s = Quot(1,2)
```

```
t = Quot(2,0)
```

```
test1 = isdef t
```

```
test2 = isInteger r
```

```
test3 = hauptnenner r s
```

```
test4 = kuerze (addiere r s)
```

```
test5 = addiere r t
```

Aufgabe 35 BNF und induktive Charakterisierung formaler Sprachen (Lösungsvorschlag)

a) Ein System von BNF - Regeln zur Beschreibung der Sprache L lautet:

$$\langle \text{wort} \rangle ::= \langle B \rangle \mid \langle C \rangle \quad (R_1)$$

$$\langle B \rangle ::= \{a \langle B \rangle b\} \quad (R_2)$$

$$\langle C \rangle ::= \{a \langle C \rangle c\} \mid \{a \langle B \rangle c\} \quad (R_3)$$

b) Die angegebene Tabelle charakterisiert induktiv die formalen Sprachen $X_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_j^i$.

$R_1^0 ::= \{\}$	$R_2^0 ::= \{\}$	$R_3^0 ::= \{\}$
$X_1^0 = \emptyset$	$X_2^0 = \emptyset$	$X_3^0 = \emptyset$
$R_1^1 ::= \{\}$	$R_2^1 ::= \{a\{b\}\}$	$R_3^1 ::= \{a\{c\} \mid \{a\{c\}\} = \{a\{c\}\}$
$X_1^1 = \emptyset$	$X_2^1 = \{\epsilon\}$	$X_3^1 = \{\epsilon\}$
$R_1^2 ::= \{a\{b\} \mid \{a\{c\}\}$	$R_2^2 ::= \{a\{a\{b\}b\}\}$	$R_3^2 ::= \{a\{a\{c\}c\} \mid \{a\{a\{b\}b\}c\}$
$X_1^2 = \{\epsilon\}$	$X_2^2 = \{\epsilon, ab\}$	$X_3^2 = \{\epsilon, ac\}$
$R_1^3 ::= \{a\{a\{b\}b\} \mid \{a\{a\{c\}c\}\} \mid \{a\{a\{b\}b\}c\}$	$R_2^3 ::= \{a\{a\{a\{b\}b\}b\}\}$	$R_3^3 ::= \{a\{a\{a\{c\}c\}c\} \mid \{a\{a\{a\{b\}b\}c\}c\} \mid \{a\{a\{a\{b\}b\}b\}c\}$
$X_1^3 = \{\epsilon, ab, ac\}$	$X_2^3 = \{\epsilon, ab, a^2b^2\}$	$X_3^3 = \{\epsilon, ac, a^2c^2, a^2bc\}$
$R_1^4 ::= \{a\{a\{a\{b\}b\}b\} \mid \{a\{a\{a\{c\}c\}c\}\} \mid \{a\{a\{a\{b\}b\}c\}c\} \mid \{a\{a\{a\{b\}b\}b\}c\}$	$R_2^4 ::= \{a\{a\{a\{a\{b\}b\}b\}b\}\}$	$R_3^4 ::= \{a\{a\{a\{a\{c\}c\}c\}c\} \mid \{a\{a\{a\{a\{b\}b\}c\}c\}c\} \mid \{a\{a\{a\{a\{b\}b\}b\}c\}c\} \mid \{a\{a\{a\{a\{b\}b\}b\}b\}c\}$
$X_1^4 = \{\epsilon, ab, ac, a^2b^2, a^2c^2, a^2bc\}$	$X_2^4 = \{\epsilon, ab, a^2b^2, a^3b^3\}$	$X_3^4 = \{\epsilon, ac, a^2c^2, a^3c^3, a^2bc, a^3bc^2, a^3b^2c\}$