Lösungsvorschläge der Klausur zu Einführung in die Informatik I

(Gruppe)

Aufgabe 1 Boolesche Algebra (Lösungsvorschlag)

(3,5 + 2,5 = 6 Punkte)

Die Gruppen unterscheiden nur in den Bezeichnungen für freie Identifikatoren a, b, c bzw. r, s, t .

a) (i)

$$\begin{aligned} \neg a \vee (b \wedge a) &= \\ \text{Distributivgesetz} &= (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee a) \\ \text{Neutralitätsgesetz} &= \neg a \vee b \\ \text{Definition der Implikation} &= a \Rightarrow b \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \neg(\neg a \vee b) \wedge (b \vee c) &= \\ \text{Gesetz von de Morgan} &= (\neg\neg a \wedge \neg b) \wedge (b \vee c) \\ \text{Involutionsgesetz} &= (a \wedge \neg b) \wedge (b \vee c) \\ \text{Assoziativgesetz} &= a \wedge (\neg b \wedge (b \vee c)) \\ \text{Distributivgesetz} &= a \wedge ((\neg b \wedge b) \vee (\neg b \wedge c)) \\ \text{Neutralitätsgesetz} &= a \wedge (\neg b \wedge c) \end{aligned}$$

b) **Behauptung:** Der Term $(a \vee \neg b) \wedge \neg(b \Rightarrow c)$ (*) ist erfüllbar.

Beweis: Wir wählen die Belegung β mit der Eigenschaft $\beta(a) = L$, $\beta(b) = L$ und $\beta(c) = O$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_{\beta}[(a \vee \neg b) \wedge \neg(b \Rightarrow c)] &= \text{and}(I_{\beta}[(a \vee \neg b)], I_{\beta}[\neg(b \Rightarrow c)]) \\ &= \text{and}(\text{or}(I_{\beta}[a], I_{\beta}[\neg b]), \text{not}(I_{\beta}[b \Rightarrow c])) \\ &= \text{and}(\text{or}(I_{\beta}[a], \text{not}(I_{\beta}[b])), \text{not}(\text{impl}(I_{\beta}[b], I_{\beta}[c]))) \\ &= \text{and}(\text{or}(L, \text{not}(L)), \text{not}(\text{impl}(L, O))) \\ &= \text{and}(\text{or}(L, O), \text{not}(O)) \\ &= \text{and}(L, L) \\ &= L \end{aligned}$$

Der Term (*) ist also erfüllbar. $\square$

Alternative Lösung über Wertetafel!

$\beta(a)$	$\beta(b)$	$\beta(c)$	$I_{\beta}[a \vee \neg b]$	$I_{\beta}[\neg(b \Rightarrow c)]$	$I_{\beta}[(a \vee \neg b) \wedge \neg(b \Rightarrow c)]$
L	L	L	L	O	O
L	L	O	L	L	L
L	O	L	L	O	O
L	O	O	L	O	O
O	L	L	O	O	O
O	L	O	O	L	O
O	O	L	L	O	O
O	O	O	L	O	O

Aufgrund der 2. Zeile in der Wertetafel ist der Term $(a \vee \neg b) \wedge \neg(b \Rightarrow c)$ (*) ist erfüllbar. $\square$

Aufgabe 2 Textersetzungssystem (Lösungsvorschlag)

(1 + 4 + 2 + 3 = 10 Punkte)

a) $V = \{<, >, L, O, |, d, e\}$

b) Es sind verschiedene rechte Seiten der Regeln möglich. Die bisher bekannten Varianten sind in folgender Lösung zusammenfasst (bei der dritten Variante ist das Ergebnis nicht, wie gefordert, von „<“ und „>“ umschlossen wird; diese Lösung wird dennoch als korrekt akzeptiert).

$T = \{$

$d|| \rightarrow |d \quad (1)$

$d|> \rightarrow eL> \quad eL \quad (2)$

$d> \rightarrow eO> \quad eO \quad (3)$

$d|e \rightarrow eL \quad d|e> \quad (4)$

$de \rightarrow eO \quad de> \quad (5)$

$<e \rightarrow < \quad \varepsilon \quad (6)$

$<> \rightarrow <O> \quad O \quad (7)$

$<| \rightarrow <d| \quad (8)$

$\}$

c)

$<||> \rightarrow^8$

$<d||> \rightarrow^1$

$<|d> \rightarrow^3$

$<|eO> \rightarrow^8$

$<d|eO> \rightarrow^4$

$<eLO> \rightarrow^6$

$<LO>$

d) (i) Ja, denn das oben angegebene Textersetzungssystem ist nicht-deterministisch.

Bei jeder Strichzahl mit mehr als einem Strich gibt es mehrere Alternativen für die Reihenfolge der Anwendung der Regeln, da z. B. nach Anwendung der Regeln (8) und (1) entweder erneut Regel (8) oder mindestens eine der Regeln {1, 2, 3} gewählt werden kann.

Bei der Markovstrategie ist die Berechnung demgegenüber deterministisch.

- (ii) Nein, das Berechnungsergebnis des Textersetzungssystem ist bei Eingabe einer korrekten Strichzahl auch ohne Anwendung der Markovstrategie determiniert.

Aufgabe 3 BNF (Lösungsvorschlag)

(2 + 3 + 2 + 2 = 9 Punkte)

Lösung für Gruppe A:

- a) zu UT_1 : alle Elemente außer $(x \wedge x)$ werden als Beispiele akzeptiert (vgl. Teilaufgabe b)
zu UT_2 : alle Elemente außer $(x \wedge (x \wedge x))$ werden als Beispiele akzeptiert (vgl. Teilaufgabe b)

b)

$$\begin{aligned}
 UT_0 &= \{x\} \\
 UT_1 &= \{(x \wedge x), (x \wedge x \wedge x), \dots\} \\
 UT_2 &= \{(t_1 \wedge \dots \wedge t_n) \mid n > 1, t_1, \dots, t_n \in UT_0 \cup UT_1, \exists i \in [1, n] : t_i \in UT_1\}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \langle ut_0 \rangle &::= x \\
 \langle ut_1 \rangle &::= (x\{\wedge x\}^+)
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \langle ut \rangle &::= \langle var \rangle \mid (\langle ut \rangle \{\wedge \langle ut \rangle\}^*) \\
 \langle var \rangle &::= [a|b|c|\dots|z]\{a|b|c|\dots|z|0|1|\dots|9\}^*
 \end{aligned}$$

Bei Gruppe B sind gegenüber Gruppe A folgende Änderungen:

Und-Terme (UT) sind ersetzt durch Oder-Terme (OT), analog alle Bezeichner ut durch ot sowie $\wedge$ durch $\vee$.

Aufgabe 4 Programmierung (Lösungsvorschlag)

(4 + 2 + 2 = 8 Punkte)

- a) Die Funktion `addFirst` läßt sich wie folgt implementieren:

```

fct addFirst = (m x, seq seq m ls) seq seq m:
  if ls  $\stackrel{?}{=} \text{empty}$  then ls
    else  $\langle \langle x \rangle \circ \text{first}(ls) \rangle \circ \text{addFirst}(x, \text{rest}(ls))$ 
  fi

```

- b) **Lösungsversion ohne Einbettung:** Es bezeichne `subseq (xs)` die gesuchte Funktion. Ist die Liste `xs` leer, so ist $\langle \langle \rangle \rangle$ das Resultat; ansonsten fügt man das erste Element von `xs` am Anfang jedes Elements von `subseq (rest (xs))` an und konkateniert das Ergebnis dieser Operation mit `subseq (rest (xs))`.

Lösungsversion mit Einbettung: Als Hilfsfunktion verwenden wir eine Funktion `fct h = (seq seq m ys, seq m xs) seq seq m:`, die mit `h (<<>, xs)` aufgerufen wird. Die Funktion `h` ist nun folgendermaßen implementiert: Wenn `xs` leer ist, ist `ys` das Ergebnis. Ansonsten bilden wir eine neue Sequenz `ys`, indem wir `ys` mit dem Resultat des Aufrufes `addFirst(first (xs), ys)` konkatenieren und rufen die Hilfsfunktion `h` mit dem neuen `ys` und dem `rest (xs)` als Argumente auf.

c) • **Lösungsversion ohne Einbettung:**

```
fct subseq = (seq m xs) seq seq m:  
  if xs  $\stackrel{?}{=}$  empty then <<>>  
    else subseq (rest (xs)) o addFirst ( first(ls), subseq (rest (xs)))  
  fi
```

• **Lösungsversion mit Einbettung:**

```
fct subseq = (seq m xs) seq seq m:  
  h (<<>>, xs)  
  
fct h = (seq seq m ys, seq m xs) seq seq m:  
  if xs  $\stackrel{?}{=}$  empty then ys  
    else h (ys o addFirst (first (xs), ys), rest (xs))  
  fi
```

Aufgabe 5 Induktion (Lösungsvorschlag)

(3 + 4 = 7 Punkte)

- a) (i) $xs_0 = \text{Empty}$: Gemäß der angegebenen Definition gilt dann $\text{rev}(xs_0) = \text{Empty}$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}\text{rev}(xs_0 \circ ys) &= \text{rev}(\text{Empty} \circ ys) \\ &= \text{rev}(ys) \\ &= \text{rev}(ys) \circ \text{Empty} \\ &= \text{rev}(ys) \circ \text{rev}(xs_0) \quad \square\end{aligned}$$

- (ii) $xs_1 = \langle c \rangle$: Gemäß der angegebenen Definition gilt dann $\text{rev}(xs_1) = xs_1$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}\text{rev}(xs_1 \circ ys) &= \text{rev}(\langle c \rangle \circ ys) \\ &\stackrel{Def.}{=} \text{rev}(ys) \circ \langle c \rangle \\ &= \text{rev}(ys) \circ \text{rev}(xs_1) \quad \square\end{aligned}$$

- b) **Induktionsannahme:** Die Aussage $\text{rev}(xs \circ ys) = \text{rev}(ys) \circ \text{rev}(xs)$ ist gültig. Wir betrachten $xs' = \langle c \rangle \circ xs$ und bilden $\text{rev}(xs' \circ ys)$. Dann gilt (unter Verwendung der in Teilaufgabe a) gezeigten Beziehungen):

$$\begin{aligned}\text{rev}(xs' \circ ys) &= \text{rev}(\langle c \rangle \circ xs \circ ys) \\ &\stackrel{Ass.}{=} \text{rev}(\langle c \rangle \circ (xs \circ ys)) \\ &\stackrel{Def.}{=} \text{rev}(xs \circ ys) \circ \langle c \rangle \\ &\stackrel{IA}{=} \text{rev}(ys) \circ \text{rev}(xs) \circ \langle c \rangle \\ &\stackrel{Def.}{=} \text{rev}(ys) \circ \text{rev}(\langle c \rangle \circ xs) \\ &= \text{rev}(ys) \circ \text{rev}(xs') \quad \square\end{aligned}$$