

Spezielle Rechenstrukturen

1. Die Rechenstruktur **BOOL** der Booleschen Werte

Menge S der Sorten: $S = \{\mathbf{bool}\}$
 Menge F der Funktionssymbole: $F = \{\mathbf{true}, \mathbf{false}, \neg, \vee, \wedge\}$

Die Interpretationsfunktion I der Signatur setzt gegebene semantische Objekte voraus. Im vorliegenden Fall sind diese Objekte die Wahrheitswerte **L** und **O** zusammen mit den (strikten) logischen Operationen der Negation (*not*), der Konjunktion (*and*) und der Disjunktion (*or*). Die Menge der Wahrheitswerte bezeichnen wir mit $\mathbb{B}$; mit $\mathbb{B}^\perp$ die um $\perp$ erweiterte Menge $\mathbb{B}$. Wir ordnen der Sorte **bool** die Trägermenge $\mathbb{B}^\perp$ zu:

$$\mathbf{bool}^{\mathbf{BOOL}} = \mathbb{B}^\perp.$$

Den Funktionssymbolen werden Funktionen mit der folgenden Funktionalität zugeordnet:

$\mathbf{true}^{\mathbf{BOOL}} : \rightarrow \mathbb{B}^\perp,$	$\mathbf{false}^{\mathbf{BOOL}} : \rightarrow \mathbb{B}^\perp,$	(nullstellige Funktionen)
$\neg^{\mathbf{BOOL}} : \mathbb{B}^\perp \rightarrow \mathbb{B}^\perp,$		(klammerfreies Präfix)
$\wedge^{\mathbf{BOOL}} : \mathbb{B}^\perp \times \mathbb{B}^\perp \rightarrow \mathbb{B}^\perp,$	$\vee^{\mathbf{BOOL}} : \mathbb{B}^\perp \times \mathbb{B}^\perp \rightarrow \mathbb{B}^\perp.$	(Infix)

Die Funktionen sind durch die folgenden Gleichungen für alle $x, y \in \mathbb{B}$ spezifiziert.

$\mathbf{true}^{\mathbf{BOOL}} = \mathbf{L},$	$\mathbf{false}^{\mathbf{BOOL}} = \mathbf{O},$
$x \wedge^{\mathbf{BOOL}} y = \mathbf{and}(x, y),$	$x \vee^{\mathbf{BOOL}} y = \mathbf{or}(x, y),$
$\neg^{\mathbf{BOOL}} x = \mathbf{not}(x).$	

2. Die Rechenstruktur **NAT** der natürlichen Zahlen

Die Rechenstruktur **NAT** ist eine Erweiterung von **BOOL**, d.h. die in **BOOL** auftretenden Sorten- und Funktionssymbole werden zusammen mit den dort gegebenen Interpretationen übernommen; insbesondere gilt für diese Symbole: $I^{\mathbf{BOOL}} = I^{\mathbf{NAT}}$. Als neue semantische Objekte tritt die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen auf mit den bekannten Bedeutungen für die Operationen $+$, $-$ und $*$ sowie den natürlichen Zahlen 0 und 1. Die ganzzahlige Division (ohne Berücksichtigung des Restes) wird durch $\div$ bezeichnet. Die Vergleichsrelationen sind $\leq$ und $\stackrel{?}{=}$.

Sorten: $S = \{\mathbf{bool}, \mathbf{nat}\}$
 Funktionssymbole: $F = \{\mathbf{true}, \mathbf{false}, \neg, \vee, \wedge, \mathbf{zero}, \mathbf{succ}, \mathbf{pred}, \mathbf{add}, \mathbf{mult}, \mathbf{sub}, \mathbf{div}, \leq, \stackrel{?}{=}\}$

Der Sorte **nat** ordnen wir die Menge $\mathbb{N}^\perp$ zu. Den neuen Funktionssymbolen werden Funktionen mit der folgenden Funktionalität zugeordnet:

$\mathbf{zero}^{\mathbf{NAT}} : \rightarrow \mathbb{N}^\perp,$	
$\mathbf{succ}^{\mathbf{NAT}} : \mathbb{N}^\perp \rightarrow \mathbb{N}^\perp,$	$\mathbf{pred}^{\mathbf{NAT}} : \mathbb{N}^\perp \rightarrow \mathbb{N}^\perp,$
$\mathbf{add}^{\mathbf{NAT}} : \mathbb{N}^\perp \times \mathbb{N}^\perp \rightarrow \mathbb{N}^\perp,$	$\mathbf{mult}^{\mathbf{NAT}} : \mathbb{N}^\perp \times \mathbb{N}^\perp \rightarrow \mathbb{N}^\perp,$
$\mathbf{sub}^{\mathbf{NAT}} : \mathbb{N}^\perp \times \mathbb{N}^\perp \rightarrow \mathbb{N}^\perp,$	$\mathbf{div}^{\mathbf{NAT}} : \mathbb{N}^\perp \times \mathbb{N}^\perp \rightarrow \mathbb{N}^\perp,$
$\leq^{\mathbf{NAT}} : \mathbb{N}^\perp \times \mathbb{N}^\perp \rightarrow \mathbb{B}^\perp,$	$\stackrel{?}{=}^{\mathbf{NAT}} : \mathbb{N}^\perp \times \mathbb{N}^\perp \rightarrow \mathbb{B}^\perp.$
	(Infix)

Die Spezifikation der Funktionen ist für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gegeben durch:

$$\begin{array}{ll}
\text{zero}^{\mathbf{NAT}} &= 0, \\
\text{pred}^{\mathbf{NAT}}(0) &= \perp, \\
\text{add}^{\mathbf{NAT}}(x, y) &= x + y, \\
\text{sub}^{\mathbf{NAT}}(x, y) &= x - y, \quad \text{falls } x \geq y \\
\text{div}^{\mathbf{NAT}}(x, 0) &= \perp, \\
(0 \leq^{\mathbf{NAT}} x) &= \mathbf{L}, \\
(x + 1 \leq^{\mathbf{NAT}} y + 1) &= (x \leq^{\mathbf{NAT}} y), \\
(x \stackrel{?}{=}^{\mathbf{NAT}} y) &= \text{and}(x \leq^{\mathbf{NAT}} y, y \leq^{\mathbf{NAT}} x). \\
\text{succ}^{\mathbf{NAT}}(x) &= x + 1, \\
\text{pred}^{\mathbf{NAT}}(x) &= x - 1, \quad \text{falls } x \geq 1 \\
\text{mult}^{\mathbf{NAT}}(x, y) &= x * y, \\
\text{sub}^{\mathbf{NAT}}(x, y) &= \perp, \quad \text{falls } x < y \\
\text{div}^{\mathbf{NAT}}(x, y) &= x \div y, \quad \text{falls } y > 0 \\
(x + 1 \leq^{\mathbf{NAT}} 0) &= \mathbf{O},
\end{array}$$

3. Die Rechenstruktur SEQ der Sequenzen

Die Rechenstruktur **SEQ** ist eine Erweiterung der Rechenstruktur **NAT**. Sei **m** eine beliebige Sorte mit Trägermenge $M^\perp$. Dann sind die Mengen S der Sorten und F der Funktionssymbole der Rechenstruktur **SEQ** gegeben durch:

$$\begin{array}{ll}
\text{Sorten:} & S = \{\mathbf{bool}, \mathbf{nat}, \mathbf{m}, \mathbf{seq\ m}\} \\
\text{Funktionssymbole:} & F = \{\mathbf{true}, \mathbf{false}, \neg, \vee, \wedge, \mathbf{zero}, \mathbf{succ}, \mathbf{pred}, \mathbf{add}, \mathbf{mult}, \mathbf{sub}, \mathbf{div}, \leq, \stackrel{?}{=}, \\
& \mathbf{empty}, \mathbf{make}, \mathbf{conc}, \mathbf{first}, \mathbf{rest}, \mathbf{last}, \mathbf{lrest}\}
\end{array}$$

Wir beziehen uns auf die Menge der endlichen Sequenzen M^* über M und der dort definierten Funktionen der Konkatenation $\circ$ und der leeren Sequenz ε , sowie einer Funktion $\langle \rangle$, die ein Element $x \in M$ auf eine einelementige Sequenz $\langle x \rangle \in M^*$ abbildet. Die Gleichheitsrelation über M^* bezeichnen wir mit $=$. Damit definieren wir die Semantik der Rechenstruktur **SEQ** wie folgt, zunächst für die neuen Sorten:

$$\mathbf{m}^{\mathbf{SEQ}} = M^\perp, \quad (\mathbf{seq\ m})^{\mathbf{SEQ}} = (M^*)^\perp.$$

Den neuen Funktionssymbolen werden Funktionen mit der folgenden Funktionalität zugeordnet:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{empty}^{\mathbf{SEQ}} & : \rightarrow (M^*)^\perp, \\
\mathbf{first}^{\mathbf{SEQ}} & : (M^*)^\perp \rightarrow M^\perp, \\
\mathbf{last}^{\mathbf{SEQ}} & : (M^*)^\perp \rightarrow M^\perp, \\
\mathbf{conc}^{\mathbf{SEQ}} & : (M^*)^\perp \times (M^*)^\perp \rightarrow (M^*)^\perp, \\
\stackrel{?}{=}^{\mathbf{SEQ}} & : (M^*)^\perp \times (M^*)^\perp \rightarrow \mathbb{B}^\perp. \\
\mathbf{make}^{\mathbf{SEQ}} & : M^\perp \rightarrow (M^*)^\perp, \\
\mathbf{rest}^{\mathbf{SEQ}} & : (M^*)^\perp \rightarrow (M^*)^\perp, \\
\mathbf{lrest}^{\mathbf{SEQ}} & : (M^*)^\perp \rightarrow (M^*)^\perp,
\end{array}$$

Für alle $m \in M$, $x, y \in M^*$ spezifizieren wir

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{empty}^{\mathbf{SEQ}} & = \varepsilon, \\
\mathbf{first}^{\mathbf{SEQ}}(\varepsilon) & = \perp, \\
\mathbf{rest}^{\mathbf{SEQ}}(\varepsilon) & = \perp, \\
\mathbf{last}^{\mathbf{SEQ}}(\varepsilon) & = \perp, \\
\mathbf{lrest}^{\mathbf{SEQ}}(\varepsilon) & = \perp, \\
\mathbf{conc}^{\mathbf{SEQ}}(x, y) & = x \circ y, \\
\mathbf{make}^{\mathbf{SEQ}}(m) & = \langle m \rangle, \\
\mathbf{first}^{\mathbf{SEQ}}(\langle m \rangle \circ x) & = m, \\
\mathbf{rest}^{\mathbf{SEQ}}(\langle m \rangle \circ x) & = x, \\
\mathbf{last}^{\mathbf{SEQ}}(x \circ \langle m \rangle) & = m, \\
\mathbf{lrest}^{\mathbf{SEQ}}(x \circ \langle m \rangle) & = x, \\
(x \stackrel{?}{=}^{\mathbf{SEQ}} y) & = (x = y).
\end{array}$$