Technische Universität München **WS 2006/07**
Institut für Informatik
Prof. Manfred Broy
A. Gruler, B. Spanfelner **Musterlösung zu Blatt 5**

Übungen zu „Formale Methoden“

Aufgabe 1 Sequentielle Erweiterung [LÖSUNG]

Ein $\perp$-Argument steht für eine nichtterminierende Berechnung bei der Auswertung eines Arguments. Nichtstrikte Funktionen entsprechen damit einer *lazy evaluation*-Strategie, bei der die Auswertung eines Ausdrucks schon beendet werden kann, wenn ein Teil der Ergebnisse (der Parameterauswertungen) berechnet wurde und daraus das gewünschte Ergebnis für die Gesamtfunktion bestimmt werden kann. Weniger Striktheit bedeutet also, dass die Funktion robuster hinsichtlich Nichtterminierung ist.

(a) Es gibt zwei Möglichkeiten, ein Argument als erstes auszuzeichnen, wie die folgenden zwei Erweiterungen von $\leq$ verdeutlichen:

$\leq_1$	0	L	$\perp$
0	L	L	L
L	0	L	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

und

$\leq_2$	0	L	$\perp$
0	L	L	$\perp$
L	0	L	$\perp$
$\perp$	$\perp$	L	$\perp$

(b) Die beiden Funktionen $\leq_1$ bzw. $\leq_2$ unterscheiden sich gegenüber der Funktion $\leq$ ausschließlich in den Fällen $(0, \perp)$ und $(\perp, L)$. Es gilt $\leq \sqsubseteq \leq_1$ und $\leq \sqsubseteq \leq_2$, da

$$\begin{array}{ccccccc} \leq & (& 0, & \perp &) & = & \perp \\ & & \sqsubseteq & \sqsubseteq & & & \sqsubseteq \\ \leq_1 & (& 0, & \perp &) & = & L \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{ccccccc} \leq & (& \perp, & L &) & = & \perp \\ & & \sqsubseteq & \sqsubseteq & & & \sqsubseteq \\ \leq_2 & (& \perp, & L &) & = & L \end{array}$$

Die beiden Erweiterungen $\leq_1$ und $\leq_2$ sind jedoch bezüglich Monotonie miteinander nicht vergleichbar, da

$$\begin{array}{ccccccc} \leq_1 & (& 0, & \perp &) & = & L \\ & & \sqsubseteq & \sqsubseteq & & & \sqsubseteq \\ \leq_2 & (& 0, & \perp &) & = & \perp \end{array} \qquad \text{aber} \qquad \begin{array}{ccccccc} \leq_1 & (& \perp, & L &) & = & \perp \\ & & \sqsubseteq & \sqsubseteq & & & \sqsubseteq \\ \leq_2 & (& \perp, & L &) & = & L \end{array}$$

(c) Auf Bool lassen sich die Funktionen $<$, $=$ und $\vee$ nicht derart sequentiell erweitern, dass $(a \leq b) = ((a < b) \vee (a = b))$ auf $Bool^{\perp}$ gilt. Denn es ist $(0 \leq_1 \perp) = L$, aber $<$, $=$ sind notwendigerweise strikt. Dies liegt daran, dass für die Bestimmung dieser Funktionen beide Argumente bekannt sein müssen (im Wesentlichen liegt dass daran, dass in beiden Teile entweder $=$ oder $\neq$ berechnet werden muß). Also ist $((0 < \perp) \vee (0 = \perp)) = \perp$. Ähnlich steht $(\perp \leq_2 L) = L$ entgegen, dass $((\perp < L) \vee (\perp = L)) = \perp$.

Aufgabe 2 Monotone, nicht-stetige Funktion [LÖSUNG]

Wir zeigen zuerst die Monotonie, also $A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$ per Fallunterscheidung:

• $A \leq B$, A und B endlich
$\Rightarrow f(A) = f(B) = \{42\}$, insbesondere $f(A) \leq f(B)$

• $A \leq B$, A endlich und B unendlich
$\Rightarrow f(A) = \{42\} \leq \mathbb{N} = f(B)$

• $A \leq B$, A und B unendlich
$\Rightarrow f(A) = f(B) = \mathbb{N}$, insbesondere $f(A) \leq f(B)$

• $A \leq B$, A unendlich und B endlich
nicht möglich!

Das sind alle möglichen Fälle, womit die Monotonie nachgewiesen ist.

Als nächstes betrachten wir die Stetigkeit. In einer CPO (Complete Partial Order) $(C, \leq)$ heißt eine Menge $X \leq C$ gerichtet, wenn jede endliche Teilmenge von X eine obere Schranke in X enthält. Die kleinste obere Schranke bzgl. $\leq$ wird mit *sup* („supremum“) bezeichnet. Eine Funktion f heißt stetig genau dann, wenn für alle gerichteten Teilmengen $X \leq C$ gilt, daß $f(sup(X)) = sup(f(X))$ ist.

Der Beweis der Nicht-Stetigkeit wird durch Angabe eines Gegenbeispiels geführt, d.h. eine Menge T mit $f(sup(T)) \neq sup(f(T))$ wird konstruiert. Es sei dazu $A_i = \{1, \ldots, i\}$ und $T = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Nun ist $sup(T) = \bigcup_{A_i \in T} A_i = \mathbb{N}$, und damit ist $f(sup(T)) = \mathbb{N}$. Andererseits ist $f(T) = \{\{42\}\}$, weil $f(A_i) = \{42\}$ für alle A_i ($f(T)$ ist die Vereinigung der punktweisen Anwendungen von f auf die Elemente von T; ein Urbild von f ist eine Menge und nicht eine Menge von Mengen.).

$$\underbrace{\underbrace{f\left(\underbrace{sup\,(T)}_{=\mathbb{N}}\right)}_{=\mathbb{N}}}_{=\mathbb{N}} \quad \neq \quad \underbrace{sup\Big(\underbrace{f\,(T)}_{:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)\;=\;\{\{42\}\}}\Big)}_{=\{42\}}$$

Also ist $f(sup(T)) = \mathbb{N} \neq \{42\} = sup(f(T))$.

Aufgabe 3 Eigenschaften von Funktionen [LÖSUNG]

Die gegebene Funktionsdefinition von foo ergibt die folgende Wertetabelle:

foo	a	b	$\perp$
a	a	a	$\perp$
b	a	a	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	b

(a) Die Funktion foo ist nicht strikt.
Gegenbeispiel: $foo(\bot, \bot) = b \neq \bot$

(b) Die Funktion foo ist nicht monoton.

Gegenbeispiele:
$$\begin{array}{lccc} foo(& \bot, & \bot) & = \beta \\ & \sqsubseteq & \sqsubseteq & \not\sqsubseteq \\ foo(& \beta, & \bot) & = \bot \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} foo(& \bot, & \bot) & = \beta \\ & \sqsubseteq & \sqsubseteq & \not\sqsubseteq \\ foo(& \alpha, & \bot) & = \bot \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} foo(& \bot, & \bot) & = \beta \\ & \sqsubseteq & \sqsubseteq & \not\sqsubseteq \\ foo(& \alpha, & \alpha) & = \alpha \end{array}$$

(c) Sequentielle Erweiterung:

bar	$\bot$	a	b
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
a	$\bot$	a	b
b	$\bot$	a oder b	b